

§ Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού στον $\mathbb{R}^3$

Η γενική μορφή είναι

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}x + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (*)$$

Εάν θέσουμε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

Τότε η εξίσωση (*)

$${}^t X \cdot A \cdot X + 2 {}^t X \cdot B + a_{44} = 0$$

πριν κάνουμε την ταξινόμηση της

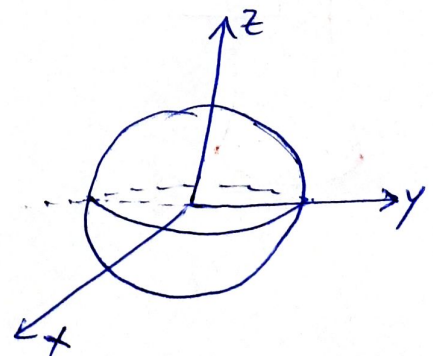
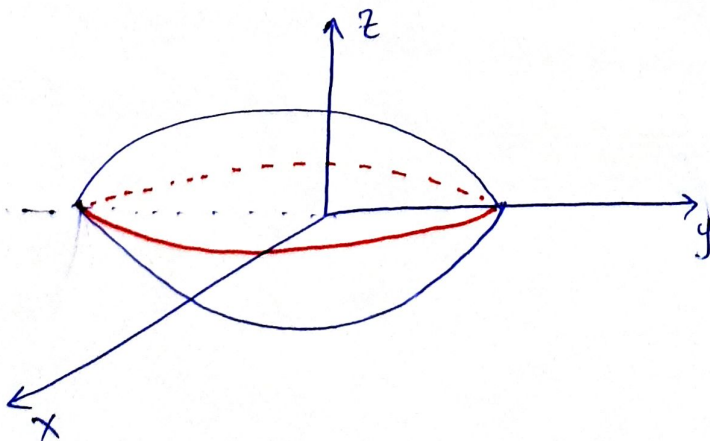
(*) ας δούμε πρώτα κάποιες ειδικές μορφές.

(1) Ελλειψοειδές :

Μια επιφάνεια που σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

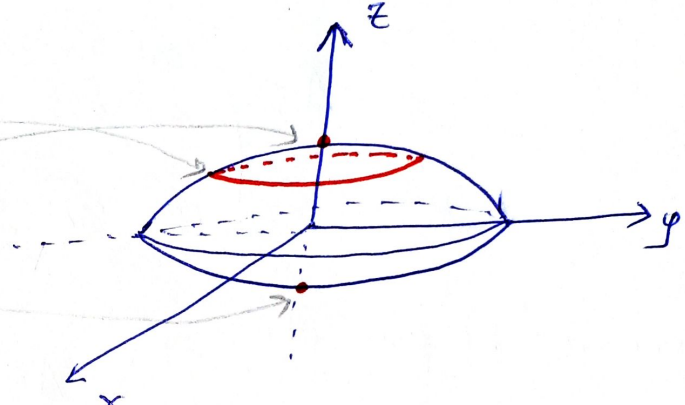
με $a, b, \gamma > 0$.



Όταν $a=b=\gamma$ έχουμε σφαίρα.

Ιδιότητες:

- (i) $a = b = \gamma = R \rightarrow$ έχουμε σφαίρα με ακτίνα R .
- (ii) Είναι συμμετρικό ως προς των αρχών, άξονες και τα επίπεδα xy, yz, xz .
- (iii) Τομές με επίπεδο $z = 1$ είναι η καμπύλη
$$\begin{cases} z = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{1^2}{\gamma^2} \end{cases}$$
- η οποία είναι
- $$\begin{cases} \text{έλλειψη, αν } |1| < \gamma \\ \text{σημείο, αν } |1| = \gamma \\ \emptyset, \text{ αν } |1| > \gamma \end{cases}$$

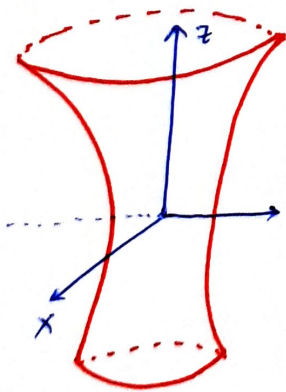


(2) Μονόχωρο υπερβολοειδές:

Μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα έχει εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

με $a, b, \gamma > 0$.



Ιδιότητες:

- (i) Συμμετρία ως προς τα επίπεδα συζευγμένων άξονες και αρχή.
- (ii) Ο άξονας z δεν τέμνει την επιφάνεια.

(iii) Τομή με επίπεδο

$z=0$: είναι η καμπύλη

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

"Ελλειψη".

(iv) Τομή με επίπεδο $z=1$: είναι η καμπύλη

$$\begin{cases} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{1^2}{\gamma^2} \end{cases}$$

(v) Τομή με επίπεδο $x=0$: είναι

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \end{cases}$$

"υπερβολή".

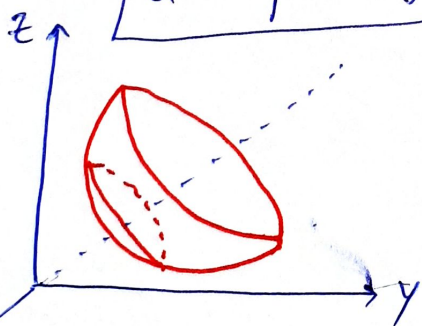
Ομοίως η τομή με επίπεδο $y=0$.

(3) Διχωνο υπερβολοειδές:

Είναι η επιφάνεια που σε κάποιο άξονα συντεταγμένων έχει την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

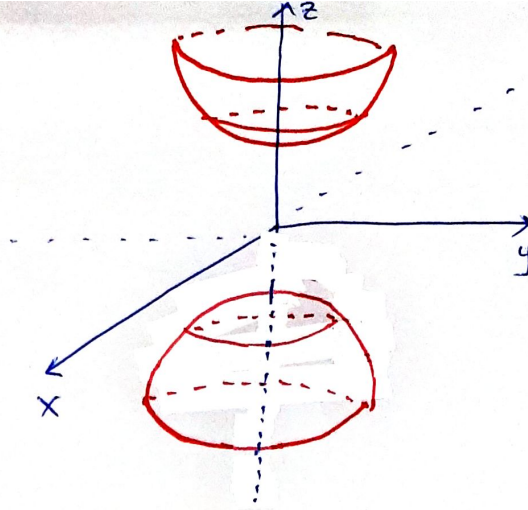
με $a, b, \gamma > 0$.



Ιδιότητες:

- (i) Συμμετρία ως επίπεδα συντεταγμένων και αρχή.
- (ii) Μόνο ο άξονας Ox τέμνει την επιφάνεια.

$$(iii) -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$



(iv) Τομές με επίπεδα συντεταγμένων

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1}$$

• Το $x=0$ δεν τέμνει την επιφάνεια.

• Το $y=0$ τέμνει την επιφάνεια.

στην καμπύλη

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \end{cases}$$

"υπερβολή".

• Το επίπεδο $z=0$ τέμνει την επιφάνεια

στην καμπύλη

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

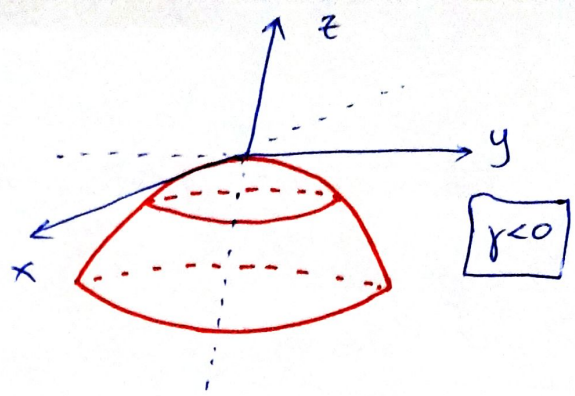
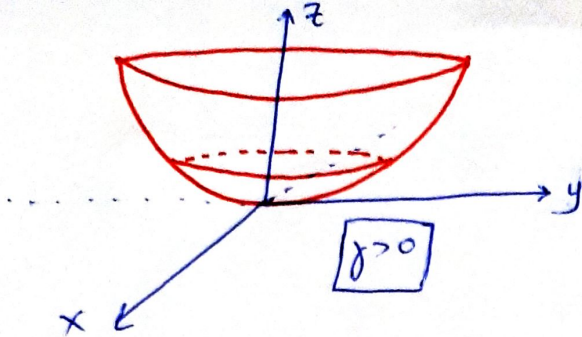
"υπερβολή".

(4) Ελλειπτικό παραβολοειδές:

Είναι η επιφάνεια που σε κάποιο άξονα έχει εστίαση

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z}$$

με $a, b > 0, \gamma \neq 0$.



Τομές της επιφάνειας

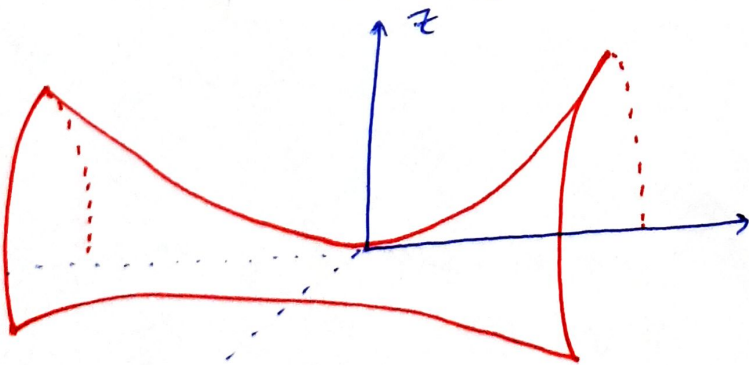
• Τομή με $z=1 > 0 \rightarrow \begin{cases} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma \cdot 1 \end{cases}$ "Ελλειψη".

• Τομή με $x=1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z \end{cases}$ "Παραβολή".

(5) Υπερβολικό παραβολοειδές:

Είναι η επιφάνεια με εξίσωση

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z} \quad a, b, \gamma > 0.$$



Ιδιότητες:

(i) Το επίπεδο $z=0$ τέμνει την ελιφάνεια στην καρδιά

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z=0 \end{cases}$$

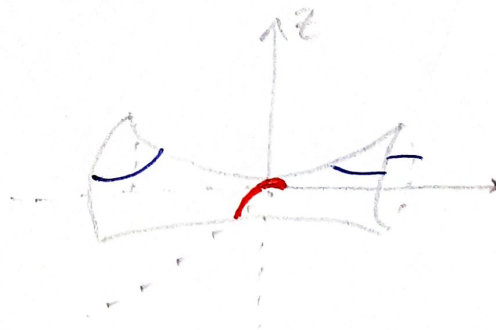
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \\ z=0 \end{cases}$$

που είναι δύο ευθείες

(ii) Τα επίπεδα $x=0$ και $y=0$ τέμνουν την ελιφάνεια σε παραβολές

(iii) Κάθε επίπεδο $z=1$ τέμνει την ελιφάνεια στην υπερβολή.

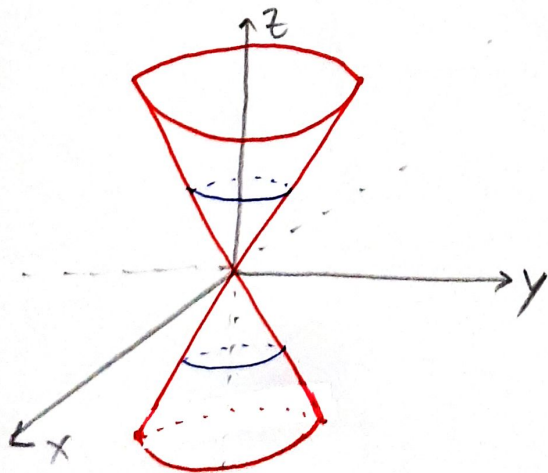
$$\begin{cases} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2 \end{cases}$$



(6) Κώνος:

Λέχεται η ελιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα ανατεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0} \quad \text{με } a, b, c > 0.$$

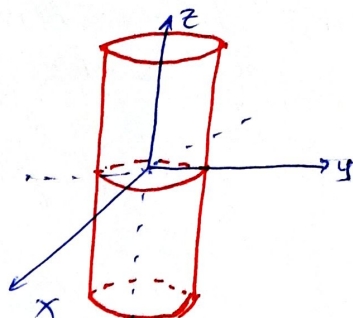


Τόμες με επίπεδα δίνουν τις γνωστές "κωνικές τμήματα".

(7) Έχουμε και τις
 παρακάτω επιφάνειες:

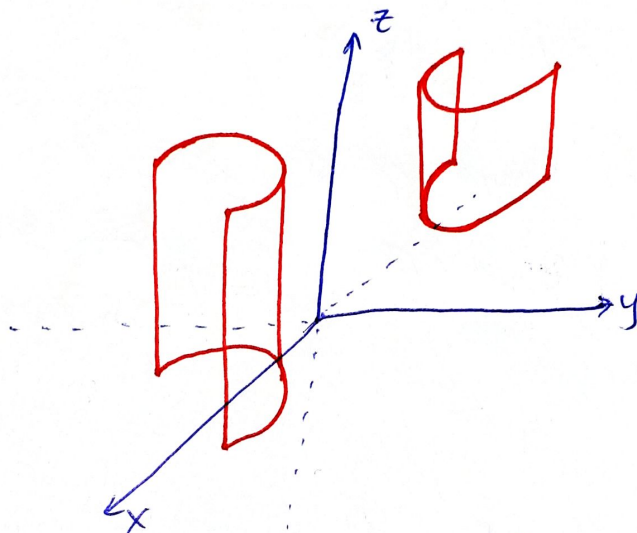
(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

"Ελλειπτικός κύλινδρος"



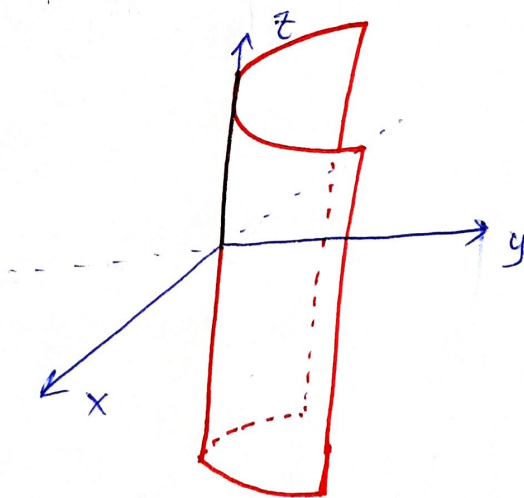
(2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

"Υπερβολικός
 κύλινδρος"



(3) $\frac{x^2}{a^2} - 2my = 0$

"Παραβολικός
 κύλινδρος"



§ Ταξινόμηση καμπύλων και ελλειψοειδών 2^{ου} βαθμού.

Γενικά θα αποδείξουμε ότι κάθε ελλειψοειδές 2^{ου} βαθμού μετά από κατάλληλη αλλαγή ανατεταγμένων θα καταλήξει σε μια από τις προηγούμενες ειδικές μορφές.

• Στοιχεία από την Γραμμική Άλγεβρα

Θα αναφερθούμε σε συμμετρικούς πίνακες.

Διδαδύ, σε πίνακες της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 1

Κάθε συμμετρικός πίνακας $A \in M_{n \times n} = M_n$ έχει όλες τις ιδιοτιμές πραγματικές.

Θεώρημα 2

Εάν $A \in M_n$ συμμετρικός πίνακας, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας

$$P \text{ έτσι ώστε } {}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Δεσφάμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Ας διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A .

Βήμα 1

Βρίσκουμε ιδιοτιμές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+3)^2 \quad \text{ιδιοτιμές} \quad \lambda_1 = 3(\text{απλ.}), \quad \lambda_2 = -3(\text{δ.π.}).$$

Βήμα 2 Εύρεση ιδιοχώρων

• Εύρεση του $V(3)$

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Άρα $V(3) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ και μια βάση του $V(3)$ είναι

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Εύρεση του $V(-3)$:

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } V(-3) &= \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Μια βάση τα $V(-3)$ είναι $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Μια ορθοκανονική βάση Από διαδικασία Gram-Schmidt

$\Rightarrow$ ορθοκανονική βάση $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ο ορθογώνιος πίνακας είναι

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Για αυτό ισχύει

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$